



TITLE:

完全 m 組グラフ
 $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ のクロー分解
について (実験配置の理論と応用
)

AUTHOR(S):

田澤, 新成

CITATION:

田澤, 新成. 完全 m 組グラフ $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ のクロー分解について (実験配置の理論と応用). 数理解析研究所講究録 1980, 404: 158-162

ISSUE DATE:

1980-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102308>

RIGHT:

完全 m 組グラフ $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ のクロ-分解について

広島経済大学 田澤新成

§ 1. 序

V_1, V_2, \dots, V_m はそれぞれ n_1, n_2, \dots, n_m 個の点からなる点集合である。各 V_i についてその中のどの二点も結ばれてなく、 V_i の各点は V_i 以外のすべての点と結ばれてゐるようなグラフを完全 m 組グラフと云い、 $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ と記述する。特に、1点と他の c (≥ 2) 個の点すべてと結ぶ完全2組グラフ $K_2(1, c)$ は次数 c のクロ-と呼ぶ。次数 c の点をクロ-の根と呼ぶ。

定義 完全 m 組グラフ $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ が互いに共通の線をもたない次数 c のクロ-の和に書けるならば、 $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ は次数 c のクロ-分解をもつといわれる。

論文 [2] で $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ が次数 c のクロ-分解をもつための必要条件を与えた。こゝでは $\sum_{i=1}^m n_i - \max_j n_j < c$ のときの必要十分条件、 $\sum_{i=1}^m n_i - \max_j n_j \geq c$ のときの必要条件を与える。以下では、一般性を失うことなく $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$ とし、 $N =$

$$\sum_{i=1}^m n_i \leq c.$$

§ 2. $N - n_m < c$ のとき

定理 1 $N - n_m < c$ のとき 完全 m 組グラフ $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$

が次数 c のクロ-分解をもつための必要十分条件は

$$(i) \quad \frac{N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2}{2c} = \text{整数}$$

$$(ii) \quad (N - n_m) \left\lceil \frac{n_m}{c} \right\rceil \leq \frac{N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2}{2c} \leq \sum_{i=1}^{m-1} n_i \left\lfloor \frac{N - n_i}{c} \right\rfloor$$

である。ここで $\lfloor r \rfloor$ は r を越えない最大の整数, $\lceil r \rceil$ は r 以上の最小の整数である。

証明 (必要性) $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ の線の本数は $(N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2)/2$ であるから, (i) は明らかに必要である。 V_i の点 v_p を根とするクロ-の個数を y_{ip} と書く ($p=1, 2, \dots, n_i; i=1, 2, \dots, m$)。 $y_i = \sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}$ とおく。 $N - n_m < c$ であるから $y_m = 0$ 。 また, $p=1, 2, \dots, n_i; i=1, 2, \dots, m-1$ に対し $n_m \leq y_{ip} \leq N - n_i$ である。

$$\left\lceil \frac{n_m}{c} \right\rceil \leq y_{ip} \leq \left\lfloor \frac{N - n_i}{c} \right\rfloor \quad (1)$$

である。それ故 $\sum_{i=1}^m y_i = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{p=1}^{n_i} y_{ip} = (N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2)/2c$ を用いて

(ii) を得る。

(十分性) 条件 (i) と (ii) を用い, 若干の計算により $(N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2)/2c$ が $N - n_m$ の倍数であることがわかる。すなわち

$$\frac{N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2}{2c} = (N - n_m)a. \quad (2)$$

次の2つの補題を用意する。下記で $G_{t,u}$ はすべての要素が1以上の大きさ $t \times u$ の行列である。

補題2 [3] 完全 m 組グラフ $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ が次数 c の Γ -分解をもつための必要十分条件は

- (a) $M_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$
- (b) $M_{ij} + M_{ji}^T = G_{n_i, n_j} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m)$
- (c) $\sum_{j=1}^m M_{ij} G_{n_j, 1}$ の各要素が c の整数倍である。すなわち

$$\sum_{j=1}^m M_{ij} G_{n_j, 1} = (a_{i1}c, a_{i2}c, \dots, a_{in_i}c)^T \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

とみたす m^2 個の $0-1$ 部分行列 M_{ij} (大きさ $n_i \times n_j$) から成る $0-1$ 行列

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & \dots & M_{mm} \end{bmatrix} \quad (4)$$

が存在することはある。

補題3 [1] a_{ip} は $\sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^{n_i} a_{ip}c = (N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2)/2$ とみたし、 $a_{i1} \geq a_{i2} \geq \dots \geq a_{in_i}$ とみたす非負の整数とする。このとき条件 (a)-(c) とみたす N 次の $0-1$ 行列 M が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^{k_i} a_{ip}^c \leq \frac{1}{2} \left\{ N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2 - (N-K)^2 + \sum_{i=1}^m (n_i - k_i)^2 \right\} \quad (5)$$

が $0 \leq k_i \leq n_i$ をみたす m 個の整数 k_i のあうやう組に対して成立する c である。ただし $K = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ である。

補題 3 における a_{ip} に対し

$$a_{ip} = a \quad (p=1, 2, \dots, n_i; i=1, 2, \dots, m-1) \quad (6)$$

$$a_{mp} = 0 \quad (p=1, 2, \dots, n_m)$$

とおく。そして a は (2) に現われたものである。 (6) に対し不等式 (5) を検証する。 (5) の左辺に \cdots $\sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^{k_i} a_{ip} = ac K_0$ 。そして $K_0 = k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1}$ である。従って (5) の右辺 - (5) の左辺) $= S/2N_0$ を得る。そして $N_0 = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$,

$$S = (K_0 - K)(N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2) - N_0 \left\{ (N-K)^2 - \sum_{i=1}^m (n_i - k_i)^2 \right\} \quad (7)$$

である。 $t_i = n_i - k_i$ ($i=1, 2, \dots, m$), $T_0 = \sum_{i=1}^{m-1} t_i$ とおき、若干の計算により

$$S = (K_0 T_0^2 - 2T_0 \sum_{i=1}^{m-1} k_i t_i + K_0 \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2) + T_0 (K_0^2 - \sum_{i=1}^{m-1} k_i^2) + 2T_0 (K_0 + T_0)(n_m - t_m) \quad (8)$$

を得る。 (8) の 1, 2, 3 項すべて非負にあるから $S \geq 0$ であることがわかる。それ故、補題 2, 3 により $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ が次数 c の \square -分解をもつ。(定理 1 の証明終)

§ 3. $N - n_m \geq c$ のとき

定理 4 $N - n_m \geq c$ のとき, 完全 m 組グラフ $K_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ が次数 c の γ ロ - 分解をもつための必要条件は

$$(i) \quad \frac{N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2}{2c} = \text{整数}$$

$$(iii) \quad \frac{N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2}{2c} \geq N - n_m$$

である。

証明 (i) は明らか。 V_i の点と根とする γ ロ - の個数を y_i と書く。分解可能ということから, T_i か T_i' の一つ, T_i と T_i' は j_0 を除いてすべての i に対し $y_i \geq n_i$ である。それ故

$$\frac{N^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2}{2c} = \sum_{i=1}^m y_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^m n_i = N - n_{j_0} \geq N - n_m \quad (9)$$

すなわち (iii) を得る。

$N - n_m \geq c$ の場合, いくつかの十分条件が知られている。特に, $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$ のとき (iii) は $mn \geq 2c$ となり [3] に見られるように (i) (iii) はまた十分である。

参考文献

- [1] J.W.Moon(1962). On the score sequence of an n -partite tournament. Canad. Math. Bull. 5, 51-58.
- [2] S.Tazawa(1979). Claw-decomposition and evenly-partite-claw-decomposition of complete multi-partite graphs. Hiroshima Math. J. 9, 503-531.
- [3] K.Ushio, S.Tazawa and S.Yamamoto(1978). On claw-decomposition of a complete multi-partite graph. Hiroshima Math. J. 8, 207-210.